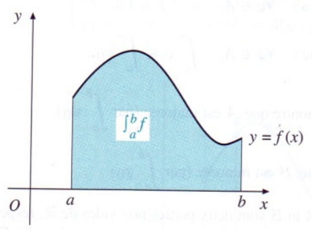
Prérequis: applications en escalier et leur intégration.
Soient a, b réels tq a<b, E(a,b) ens. f° en esc. sur [a;b].

I. Définition, premières propriétés (Mon).

Th.1: Soient $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et $\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*$. Il existe $\varphi,\psi:[a;b]\to\mathbb{R}$ en escalier telles que: $\varphi\le f\le\psi$ et $\psi-\varphi\le\varepsilon$.

Prop-Def.1: Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux. $\left\{\int_a^b\varphi;\varphi\in E(a;b),\varphi\le f\right\}$ et $\left\{\int_a^b\psi;\psi\in E(a;b),\psi\ge f\right\}$ $\subset\mathbb{R}$ admettent resp. une borne Sup. et une borne Inf. dans $\mathbb{R}$, et ces deux bornes sont égales.
L'**intégrale** de f sur [a;b] est:

$$\int_a^b f=Sup\left(\int_a^b\varphi\right)=Inf\left(\int_a^b\psi\right)$$



$\int_a^b f$ représente l'aire algébrique de la portion de plan comprise entre C_f, l'axe des abscisses, et les droites x=a et x=b.

A. Propriétés algébriques.

Prop. 2: L'application $f\mapsto\int_a^b f$ est une forme linéaire, i.e. $\forall(f,g)\in CM^2$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\int_a^b(\lambda f+g)=\lambda\int_a^b f+\int_a^b g$.

B. Propriétés relatives à l'ordre.

a) Généralités.

Prop.3: Soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ cont.mcx.
Si $f\ge0$, alors $\int_a^b f\ge0$.

Rque: Il suffit que $f(x_0)>0$ en un point x_0 où f est continue pour avoir $\int_a^b f>0$.

Cor.: $f:[a;b]\to\mathbb{R}$. $\left\{\begin{array}{c} f \text{ continue}\\ f\ge0\\ \int_a^b f=0\end{array}\right|\Rightarrow f=0$

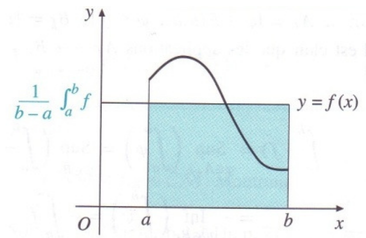
Cor.: f,g cont.mcx sur [a;b]. $f\le g\Rightarrow\int_a^b f\le\int_a^b g$.

Prop.4: Pour tout f cont.mcx, $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$.

b) Formules de la moyenne.

Cor.: Posant $m=\operatorname{Inf}_{x\in[a;b]} f(x)$ et $M=\operatorname{Sup}_{x\in[a;b]} f(x)$, on a: $m(b-a)\le\int_a^b f\le M(b-a)$.

Def.2: On appelle **valeur moyenne** de f sur [a;b] le réel: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.
Elle est comprise entre M et m.



C'est la hauteur d'un rectangle d'aire $\int_a^b f$.

Prop.5: (CAPES)
$f:[a;b]\to\mathbb{R}$ cont. sur [a;b].
$g:[a;b]\to\mathbb{R}$ cont. mcx. et ≥0 sur [a;b].
Alors $\exists c\in[a;b]$ tel que $\int_a^b fg=f(c).\int_a^b g$

c) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Prop.6: f,g cont.mcx sur [a;b].
$$\left(\int_a^b fg\right)^2\le\left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right)$$

Prop.7: Cas d'égalité. Pour f,g continues, il y a égalité ssi la famille $(f;g)$ est liée. (1) (2)

C. Relations de Chasles.

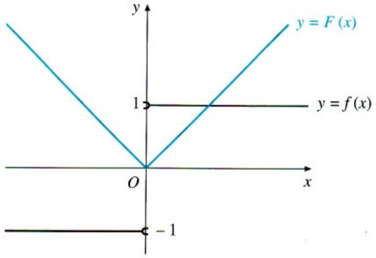
Prop.9: a,b,c dans$\mathbb{R}$ et f à valeurs $\mathbb{R}$, cont. mcx. sur un segment contenant a, b, c.
Alors $\int_a^b f+\int_b^c f=\int_a^c f$. (3)

II. Lien avec la dérivation (Mon).

(K=ℝ ou ℂ)

Prop. 10: $F : I \to K$, $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f$ est continue sur I, C¹ par mcx sur I, dérivable en tt point x_1 de I <u>où f est continue</u>, et dans ce cas $F'(x_1) = f(x_1)$.

<u>Exemple</u>: la fonction "signe". On considère:



$$f : x \mapsto \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

Alors ∀ x dans ℝ, $F(x) = |x|$

(F est cont., C¹ sur ℝ*, mais non dvble en 0).

Cor.: Pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, si $f \in C^p(I)$, $F \in C^{p+1}(I)$, et $F' = f$.

III. Primitive (Mon).

A. Existence.

Def.3: Soient $f, \phi : I \to K$ deux applications.
On dit que ϕ est **une primitive** de f sur I ssi:
ϕ est dérivable sur I et $\phi' = f$.

Th.2: Soit $f : I \to K$ continue. Alors:

1)∀ $x_0 \in I$, $F : x \mapsto \int_{x_0}^{x} f$ est une primitive de f sur I.

2)Pour toute primitive ϕ_0 de f sur I, l'ensemble des primitives de f sur I est: $\{\phi_0 + \lambda \, ; \, \lambda \in K\}$.

B. Utilisation pour le calcul de l'intégrale.

Prop.11: Soients $(a;b) \in I^2$, $f : I \to K$ continue,
ϕ une primitive de f sur I. On a: $\int_a^b f = \phi(b) - \phi(a)$.

IV. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes.

Def.4: Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ cont. mcx. On pose :
$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)$.

La linéarité, la Prop.4 et la relation de Chasles se généralisent ainsi à ℂ.

V. Notes.

(1) i.e. ∃α,β∈ℝ* t.q. $\alpha f + \beta g = 0$.

(2) Il y a aussi: **Inégalité de Minkowski** (Capes)

Prop.: f, g cont.mcx sur [a;b].

$$\left(\int_a^b (f+g)^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2\right)^{1/2}$$

<u>Non démontré</u> ds le book Capes.

(3) Le bouquin de Capes aborde ça en partant du cas: a<b<c dansℝ et $f : [a;c] \to \mathbb{R}$ cont. mcx. Alors $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ et $f : [b;c] \to \mathbb{R}$ sont cont. mcx Puis il généralise en posant $\int_a^a f = 0$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$, à trois points a, b, c qcq de l'intervalle de continuité par mcx de f. De même pour plus de trois points.

(*) On pourrait rajouter les sommes de Riemann, ou les poser en devoir maison guidé. ce sont des fonctions en escalier construites sur une subdivision régulière de I, coïncidant avec f en chaque a_i ; la somme des "aires des rectangles" tend vers l'intégrale de f qd le pas tend vers ∞ (subdivision "plus fine").

(**) On pourrait détailler le calcul des primitives, IPP et chgt de var., mais cela me semble hors sujet.

(***) On pourrait en revanche parler des méthodes d'approximation d'intégrales (rectangles, trapèzes, tout ça...).